Marin Chirciu Marian Haiducu Octavian Stroe
Marius Antonescu Florin Antohe Lucia Popa Agnes Voica

Matematică

algebră, geometrie

Caiet de lucru. Clasa a VIII-a
Partea I

✔ **Modalități de lucru diferențiate**
✔ **Pregătire suplimentară prin planuri individualizate**

Soluțiile testelor de autoevaluare pot fi consultate la adresa:
http://www.edituraparalela45.ro/wp-content/uploads/2017/07/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa8_sem1_2018.pdf

Editura Paralela 45

Cuprins

Capitolul I. NUMERE REALE

1 Forme de scriere a unui număr real. Relația $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Competența:
Identificarea în exemple, în exerciții sau în probleme a numerelor reale și a formulelor de calcul prescurtat

Ce știu

Mulțimea numerelor naturale este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
Mulțimea numerelor întregi este $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
Mulțimea numerelor raționale este $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
Între aceste mulțimi au loc incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Orice număr rațional poate fi scris:

- ca fracție ordinară (de exemplu: $\frac{1}{2}$);
- ca fracție zecimală (de exemplu: 0,5).

Fracțiile zecimale pot fi:

- finite (de exemplu: 0,25);
- infinite:
  - periodice simple: 1,(3);
  - periodice mixte: 1,2(3).

Reține! Perioada este diferită de (9).

Orice număr rațional se poate scrie ca o fracție zecimală, infinită, periodică.

Exemple: $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $-\frac{5}{2} = -2{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$; $\frac{37}{30} = 1{,}2(3)$.

Partea întreagă a unui număr real este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul respectiv.
Partea fracționară a unui număr real este diferența dintre numărul respectiv și partea sa întreagă.
Partea întreagă a numărului real x se notează $[x]$.
Partea fracționară a numărului real x se notează $\{x\}$.
Reținem că $x = [x] + \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Fracție zecimală neperiodică: $\overline{a_0, a_1 a_2 ... a_k} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_k}}{\underbrace{100...0}_{k \text{ zerouri}}}$. **Exemplu:** $12{,}304 = 12\frac{304}{1000}$.

Fracție zecimală periodică simplă: $\overline{a_0, (a_1 a_2 ... a_p)} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_p}}{\underbrace{99...9}_{p \text{ cifre de } 9}}$. **Exemplu:** $1{,}(23) = 1\frac{23}{99}$.

Fracție zecimală periodică mixtă: $\overline{a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1}(a_k a_{k+1} ... a_{k+p})} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_{k+p}} - \overline{a_1 a_2 ... a_{k-1}}}{\underbrace{99......9}_{\substack{(p+1) \\ \text{cifre de } 9}}\underbrace{00......0}_{\substack{(k-1) \\ \text{cifre de } 0}}}$.

Exemplu: $2{,}71(326) = 2\frac{71326 - 71}{99900} = 2\frac{71255}{99900}$.

Orice fracție zecimală infinită, neperiodică, nu este număr rațional.
Fracțiile zecimale periodice sau neperiodice formează numerele reale.
Un număr irațional este un număr real care nu este rațional.

Exemple de numere iraționale:

0,1010010001... (după prima cifră de 1 urmează un zero, după a doua cifră de 1 urmează două zerouri ș.a.m.d)

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

π = raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său.

Ce aflu

Recunoașterea fracțiilor care generează fracții periodice simple sau mixte

Observația 1. În cazul fracției periodice simple, fracția generatoare are la numitor $\underbrace{99...9}_{n \text{ cifre de } 9} = 10^n - 1$, unde n reprezintă numărul cifrelor din perioadă.
Numărul $10^n - 1$ nu se divide nici cu 2, nici cu 5. Deducem că după simplificare vom obține o fracție ireductibilă, al cărei numitor descompus în factori primi nu conține nici factorul 2, nici factorul 5.

Exemplu: $\frac{2}{3}$; avem $\frac{2}{3} = 0,(6)$.

Observația 2. În cazul fracției periodice mixte numărătorul nu se poate termina cu zero.
Deoarece numărătorul nu se poate termina cu zero, fracția nu se poare simplifica prin 10. Ea ar putea fi simplificată prin 2 sau prin 5, dar nu prin ambii. Deducem că la numitor rămâne sau factorul 2, sau factorul 5, la o putere cu exponentul egal cu numărul de zerouri al numitorului, adică cu câte cifre are partea neperiodică.

Exemple: $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{15}$; avem $\frac{1}{6} = 0,1(6)$, $\frac{2}{15} = 0,1(3)$.

Pentru mate-campioni

Teoremă. O fracție ireductibilă se transformă în fracție zecimală periodică simplă, dacă numitorul ei descompus în factori primi nu conține nici factorul 2, nici factorul 5. Dacă numitorul ei conține cel puțin unul din factorii 2 sau 5, dar și factori primi diferiți de 2 și 5, atunci fracția se transformă în fracție zecimală periodică mixtă având la partea neperiodică un număr de cifre egal cu cel mai mare dintre exponenții lui 2 și 5.

Ce am înțeles

1. a) Scrise ca fracții zecimale, numerele: $12, \frac{15}{10}, -\frac{24}{100}, \frac{12345}{1000}, \frac{3}{4}, -\frac{21}{5}, \frac{25}{8}$ sunt ....

b) Partea întreagă și partea fracționară a numerelor de mai sus sunt ....

2. a) Scrise ca fracții zecimale, numerele: $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{15}$ sunt ....

b) Partea întreagă și partea fracționară a numerelor de mai sus sunt ....

Știu cum să rezolv

1 Precizează în ce tip de fracție zecimală se transformă numerele: $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{25}$.

Soluție: $\frac{2}{3} = 0,(6)$ – fracție zecimală periodică simplă;

$\frac{5}{6} = 0,8(3)$ – fracție zecimală periodică mixtă;

$-\frac{2}{15} = -0,1(3)$ – fracție zecimală periodică mixtă;

$-\frac{2}{25} = -0,08$ – fracție zecimală finită.

2 Arată că $\sqrt{3}$ nu este număr rațional.

Soluție: Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{3}$ este număr rațional. Deci există numerele naturale nenule a și b prime între ele, astfel încât $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow a^2 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a = 3k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $(3k)^2 = 3b^2 \Rightarrow b^2 = 3k^2 \Rightarrow b^2 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow b = \mathcal{M}_3 \Rightarrow b = 3p, p \in \mathbb{N}^*$. Din $a = 3k$, $b = 3p$, unde k, $p \in \mathbb{N}^*$, se contrazice $(a, b) = 1$. Deducem că $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Mă antrenez

ACTIVITĂȚI MATEMATICE DIFERENȚIATE

Dificultate redusă (Înțelegere)

1 a) Scrie ca fracție zecimală numerele:

$$2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{12}{10}, -\frac{13}{4}.$$

b) Determină partea întreagă și partea fracționară a numerelor de mai sus.

2 Dă exemplu de:
a) fracție zecimală finită;
b) fracție zecimală periodică simplă;
c) fracție zecimală periodică mixtă.

3 Încadrează fracțiile zecimale următoare între două numere întregi consecutive:
a) .... $< 1,7 <$ ....; c) .... $< -1,7 <$ ....;
b) .... $< 7,1 <$ ....; d) .... $< -7,1 <$ ....

4 Compară numerele:
a) 1,3 și 1,(3); c) –1,3 și –1,(3);
b) 3,1 și 3,(1); d) –3,1 și –3,(1).

5 Scrie în ordine crescătoare numerele:
a) 3,2; 0,9; 1,4; 2,1; 1,39; 3,19; 1,309.
b) –3,2; –0,9; –1,4; –2,1; –1,39; –3,19; –1,309.

6 Completează cu cifre egalitățile următoare:

a) $\frac{\square}{\square} = 0,2$; b) $\frac{\square}{\square} = \frac{6}{15}$; c) $\frac{\square}{\square} = \frac{180}{420}$.

7 Dă trei exemple de fracții ordinare cuprinse între $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{2}$.

8 Ordonează descrescător numerele:
a) 3,4; –3,4; $-\frac{7}{2}$; $\frac{7}{2}$; b) 0,3; 0,(3); –0,3; –0,(3).

9 Transformă în fracții zecimale numerele raționale:
a) $\frac{1}{5}$; b) $-\frac{3}{4}$; c) $2\frac{1}{3}$; d) $-\frac{1}{6}$

10 Fie numărul $x = \frac{11}{6} - \frac{5}{3} + \frac{1}{9}$.
a) Scrie x sub formă de fracție ordinară.
b) Scrie x sub formă de fracție zecimală.

11 Fie $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.
a) Scrie x sub formă de fracție ordinară.
b) Scrie x sub formă de fracție zecimală.

12 Ordonează crescător numerele:

2,1; 2,11; 3,12; 2,13.

13 Ordonează descrescător numerele:

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -1.$$

Dificultate medie (Consolidare)

14 **a)** Scrie ca fracție zecimală numerele:

$$\frac{23}{100}, \frac{111}{1000}, \frac{4}{125}, \frac{2}{144}.$$

b) Determină partea întreagă și partea fracționară a numerelor de mai sus.

15 **a)** Scrie sub formă de fracție zecimală numerele:

$$\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{4}{15}, -\frac{4}{15}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{20}.$$

b) Precizează tipul de fracție zecimală în care se transformă numerele de mai sus.

16 Arată că $\sqrt{5}$ nu este număr rațional.

17 Încadrează fracțiile zecimale următoare între două numere întregi consecutive:

a) .... $< 2{,}9 <$ ....; **c)** .... $< -2{,}9 <$ ....;
b) .... $< 9{,}2 <$ ....; **d)** .... $< -9{,}2 <$ ....

18 Compară numerele:

a) 2,7 și 2,(7); **c)** –2,7 și –2,(7);
b) 7,2 și 7,(2); **d)** –7,2 și –7,(2).

19 Scrie în ordine crescătoare numerele:

a) 2,3; 0,7; 0,6; 1,5; 1,49; 1,409.
b) –2,3; –0,7; –0,6; –1,5; –1,49; –1,409.

20 Completează cu cifre egalitățile următoare:

a) $0{,}4 = \frac{\square}{\square}$; **b)** $0{,}(4) = \frac{\square}{\square}$; **c)** $\frac{60}{105} = \frac{\square}{\square}$.

21 Dă cel puțin trei exemple de fracții ordinare cuprinse între 0,3 și 0,4.

22 Ordonează descrescător numerele:

a) $4{,}4; -4{,}4; -\frac{9}{2}; \frac{9}{2}$;
b) 1,23; 1,2(3); –1,23; –1,2(3).

23 Transformă în fracții zecimale numerele raționale:

a) $\frac{1}{8}$; **b)** $-\frac{3}{5}$; **c)** $3\frac{1}{3}$; **d)** $-\frac{5}{11}$.

24 Fie numărul rațional $q = \frac{2}{15} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6}$.

a) Scrie q sub formă de fracție ordinară.
b) Scrie q sub formă de fracție zecimală.

25 Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{11}\right\}$.

a) Scrie elementele lui A ca numere zecimale.
b) Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea A, să obții un număr exprimat printr-o fracție zecimală periodică simplă?

Dificultate crescută (Aprofundare și performanță)

26 **a)** Arată că, dacă $0 < x < 1$, atunci $x < \sqrt{x} < 1$.
b) Determină primele 20 de zecimale ale numărului $\sqrt{x}$, unde $x = 1 - \frac{1}{10^{20}}$.

27 Arată că numărul $\frac{\overline{aaa}}{6}$ este reprezentat de o fracție zecimală finită.

28 Arată că numărul $A = 0{,}a + 0{,}(a) + 0{,}1(a)$ nu este natural, oricare ar fi cifra a nenulă, diferită de 9.

29 Determină $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât:

a) $[5x] = x$; **b)** $[x + 2] = [x] + 2$;
c) $\{x + 2\} = \{x\}$; **d)** $[x^2] = x$.

30 Demonstrează că $\sqrt{7n+5} \notin \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

31 **a)** Arată că $(n-1)^2 \leq (n-1)^2 + (n-1) < n^2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
b) Arată că $\sqrt{n^2 - n} \notin \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

32 **a)** Arată că dacă un număr natural este divizibil cu 5 dar nu este divizibil cu 5^2, atunci acel număr nu este pătrat perfect.
b) Arată că $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 15}$ este număr irațional.

33 **a)** Arată că, dacă un număr natural are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8, atunci acesta nu este pătrat perfect.
b) Arată că numerele $\sqrt{5k+3}$ și $\sqrt{5k+2}$ sunt numere iraționale.

34 Se numește *fracție egipteană* orice fracție de forma $\frac{1}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}$. Arată că orice *fracție egipteană* se poate scrie ca suma a două *fracții egiptene*.

Cum aplic inter- și transdisciplinar

Matematica... prin joc

Într-o zi, elevii clasei a VIII-a au organizat un joc. Ei s-au împărțit în cinci echipe, cărora le-au pus nume sugestive, fiecare echipă având ca siglă una dintre notațiile mulțimilor de numere învățate la matematică: „Echipa Naturală" ($\mathbb{N}$), „Echipa Întreagă" ($\mathbb{Z}$), „Echipa Rațională" ($\mathbb{Q}$), „Echipa Irațională" ($\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) și „Echipa Reală" ($\mathbb{R}$).

1 Dacă fiecare elev are pe tricou un număr reprezentativ pentru echipa din care face parte, unele dintre ele fiind: -7; $0{,}9$; 20; $\sqrt{5}$, care dintre aceste numere fac parte din mulțimea reprezentată de sigla Echipei Naturale?

2 Pe tricoul unui elev este numărul $\sqrt{256}$. În care echipă nu l-ai putea încadra?

3 Un elev are pe tricou numărul -3. Dacă el nu este sigur în Echipa Irațională, din care echipă nu mai poate face parte?

4 Explică de ce tricoul cu numărul 10 poate fi găsit la patru dintre cele cinci echipe.

5 Prima probă a jocului a fost ca elevii să găsească, dintre mai multe tricouri, pe cele care au numere egale. Dacă tricourile au avut inscripționate pe ele: 7; $0{,}4$; -3; $-\sqrt{9}$; 8; $\sqrt{49}$ și $\frac{2}{5}$, care au fost acestea?

6 A doua probă a constat în ordonarea nivelurilor de organizare și integrare a materiei vii: celulă, individ, biosferă, organ, atom, populație, țesuturi, moleculă, sisteme de organe, biocenoză. Care crezi că este ordinea corectă?

7 La a treia probă elevii au primit un text: „Pădurea înconjura satul ca un zid în care fagii, plopii și stejarii semănau cu niște străjeri. Aerul cald, curat te făcea să inspiri des ca toate celulele tale să se bucure de oxigenul din el. Pe solul bogat au început să cadă frunze ruginii."
Cerințele probei au fost:
a) să identifice ecosistemul din text;
b) să enumere trei elemente ale biocenozei și trei elemente ale biotopului.
Ce au răspuns elevii?

8 La cea de-a patra probă, echipele au găsit răspunsul corect la următoarea întrebare: „Ce fenomen termic are legătură cu faptul că, atunci când ieșim din apă după scăldat, simțim aerul mai rece decât înainte de a intra în apă:
a) dilatarea; **b)** condensarea;
c) difuzia; **d)** evaporarea;
e) contracția?"
Ce au răspuns elevii?

9 A cincea probă constă în clasificarea următoarelor substanțe și materiale din punct de vedere termic în trei categorii: lemn, fier, puf, argint, polistiren, sticlă, cărămidă, mercur, material plastic, aramă, lână, aur. Cum le poți clasifica?

Super-Mate

1 Demonstrează că numărul 50! nu este nici pătrat perfect, nici cub perfect.

2 Determină $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0{,}1(2)$.

3 Determină cifrele nenule x și y, astfel încât $\overline{0,x(y1)}+\overline{0,x(y8)}=0{,}9(90)$.

Cum te evaluezi la această lecție?